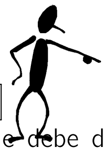
IES RAFAL – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



PROBABILIDAD-SOLUCIÓN

EJERCICIO 1

Un enfermo, que debe decidir si se somete a una operación, solicita la opinión de tres médicos especialistas. Por experiencias anteriores, se sabe que los tres médicos tienen opiniones diferentes e independientes y que las probabilidades de aconsejar ese tipo de operación son, respectivamente, 0.8, 0.5 y 0.3. Calcula:

a) **La probabilidad** de que ninguno de ellos aconseje la operación. **(1 punto)**
b) **La probabilidad** de que al menos uno de ellos aconseje la operación. **(1 punto)**
c) **La probabilidad** de que sólo uno aconseje la operación. **(1,5 puntos)**

Denotamos por M_i que el especialista i aconseje realizar la operación.

a) Nos piden la probabilidad $p(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3})$. Al ser los tres sucesos independientes podemos afirmar que $p(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) = p(\overline{M_1}) \cdot p(\overline{M_2}) \cdot p(\overline{M_3}) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}07$. Es decir, un 7%.

b) En este apartado nos piden la probabilidad de que al menos uno de los especialistas aconseje la operación. Es decir, que la aconsejen solo uno, solo dos o los tres. En este caso es más fácil calcular el suceso contrario: que ninguno de los especialistas aconseje la operación, que ya hemos calculado en el apartado anterior, siendo 0,07. Por tanto $p($"al menos uno de ellos aconseje la operación"$) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$, es decir, un 93%.

c) Aquí nos piden la probabilidad de que solo uno de los especialistas aconseje la operación. Es decir:

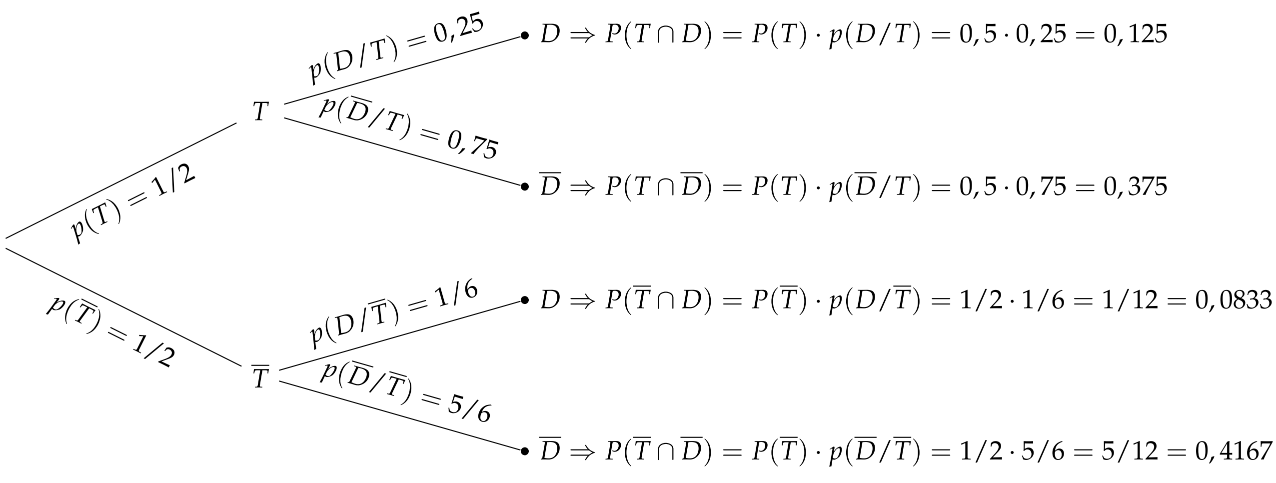
$p($"solo uno de ellos aconseje la operación"$) = p(M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) + p(\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}) + p(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3) =$ "al ser los sucesos independientes" $= 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}28 + 0{,}07 + 0{,}03 = 0{,}38$, es decir, un 38%.

EJERCICIO 2

Se dispone de dos dados, uno normal y el otro trucado, pero iguales en apariencia. La probabilidad de sacar 2 con el dado trucado es 0,25 siendo los otros resultados equiprobables. Se elige uno de los dos dados al azar y se realiza un lanzamiento. Calcular las siguientes probabilidades:

a) **Probabilidad de obtener un 2**. **(1 punto)**
b) Dado que ha salido un 2, **¿probabilidad de haber elegido el dado trucado?** **(1 punto)**

Denotamos por $T =$ "seleccionar el dado trucado" y $D =$ "salir un 2". El problema se puede solucionar haciendo un simple diagrama de árbol:



a) Nos piden la probabilidad $p(D) = p(T \cap D) + p(\overline{T} \cap D) = 0{,}125 + 0{,}0833 = 0{,}2083$.

b) Nos piden la probabilidad $p(T/D) = \dfrac{p(T \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}125}{0{,}2083} = 0{,}6$.

EJERCICIO 3

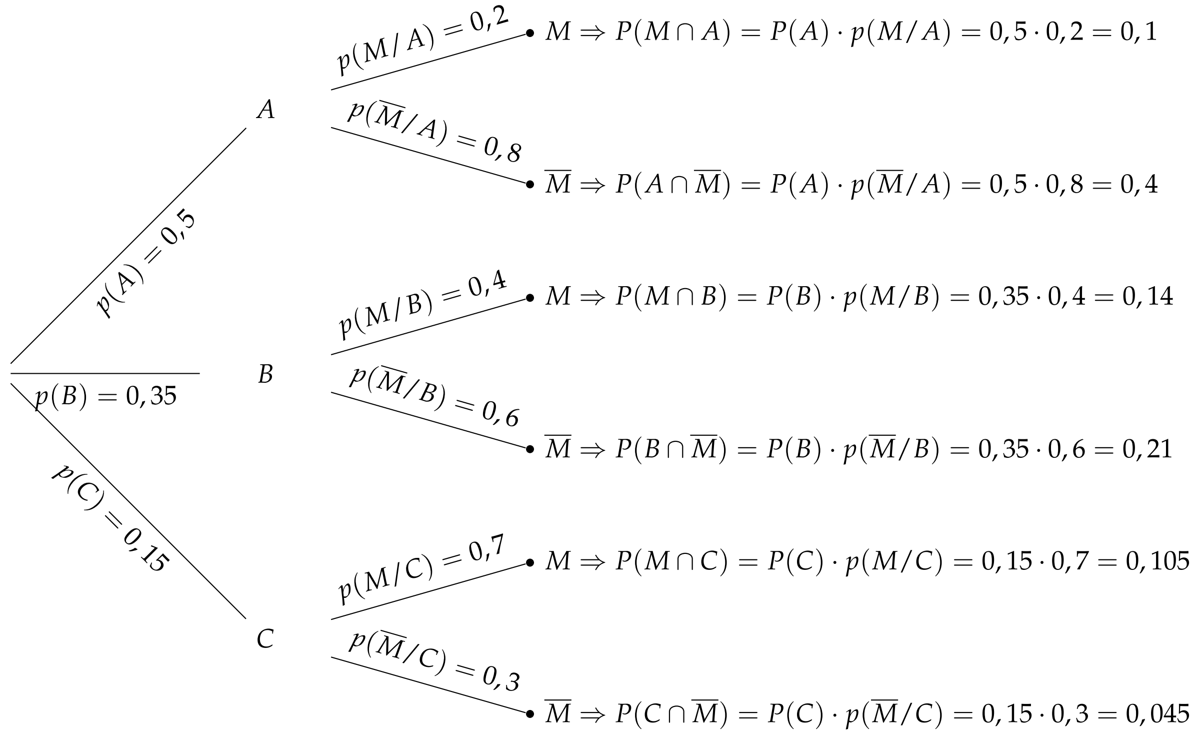
Un 50% de los clientes de un hotel son de España, un 35% son del resto de Europa y un 15% son de fuera de Europa. Se sabe que de los clientes de España, un 20% tiene más de 65 años; de los clientes del resto de Europa, un 40% tiene más de 65 años y de los clientes de fuera de Europa, un 70% tiene más de 65 años.

a) Si elegimos un cliente al azar, **¿cuál es la probabilidad** de que sea de España y tenga más de 65 años? **(1 punto)**

b) Si elegimos un cliente al azar, **¿cuál es la probabilidad** de que tenga más de 65 años? **(1 punto)**

c) Si elegimos un cliente al azar de entre los que tienen más de 65 años, **¿cuál es la probabilidad** de que sea de fuera de Europa? **(1 punto)**

Denotamos por $A =$ "el cliente seleccionado es de España", $B =$ "el cliente seleccionado es del resto de Europa", $C =$ "el cliente seleccionado es de fuera de Europa" y $M =$ "el cliente seleccionado es mayor de 65 años", por lo que las probabilidades que nos da el problema son: $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}35$, $p(C) = 0{,}15$, $p(M/A) = 0{,}2$, $p(M/B) = 0{,}4$, $p(M/C) = 0{,}7$, que podemos representar en un diagrama de árbol:



a) Nos piden la probabilidad $p(A \cap M) = 0{,}1$, como ya hemos calculado en el árbol anterior.

b) En este apartado nos piden $p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C) =$ "por el Teorema de la Probabilidad Total" $= 0{,}1 + 0{,}14 + 0{,}105 = 0{,}345$.

c) En este apartado hemos de tener en cuenta que estamos en el conjunto de los que tienen más de 65 años, por lo que nos piden la probabilidad $p(C/M) = \dfrac{p(C \cap M)}{p(M)} =$ "por la Fórmula de Bayes" $= \dfrac{0{,}105}{0{,}345} = 0{,}3043$.

NOTA: En lugar de usar un árbol podríamos haber utilizado una tabla de contingencia. Suponiendo que tenemos 100 clientes:

	A	**B**	**C**	**Total**
M	10	14	10,5	34,5
$\overline{M}$	40	21	4,5	65,5
Total	50	35	15	100

A partir de la tabla se pueden deducir fácilmente las probabilidades pedidas:

$p(A \cap M) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$; $p(M) = \dfrac{34{,}5}{100} = 0{,}345$; $p(C/M) = \dfrac{10{,}5}{34{,}5} = 0{,}3043$.

EJERCICIO 4

Un estudio sociológico sobre alcohólicos informa de que el 40% de ellos tiene padre alcohólico, el 6% tiene madre alcohólica y de los que tienen padre alcohólico el 10% tiene también madre alcohólica.

a) **Calcula la probabilidad** de que un alcohólico, seleccionado al azar, tenga padre y madre alcohólicos. **(1 punto)**

b) **Calcula el porcentaje de alcohólicos** que tiene por lo menos uno de los padres alcohólico. **(1 punto)**

Denotamos por $P =$ "un alcohólico tiene padre alcohólico", $M =$ "un alcohólico tiene madre alcohólica", por lo que las probabilidades que nos da el problema son: $p(P) = 0,4$, $p(M) = 0,06$ y $p(M/P) = 0,1$.

a) Nos piden la probabilidad $p(P \cap M)$. Dicha probabilidad la podemos obtener a partir de la probabilidad condicionada que nos da el problema:

$p(P \cap M) = p(P) \cdot p(M/P) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04$, es decir, un 4%.

b) En este apartado nos piden la probabilidad de que al menos uno de los padres sea alcohólico. Es decir, que sea alcohólico solo uno de los padres o los dos. En este caso es más fácil calcular el suceso contrario: que ninguno de los padres sea alcohólico, es decir:

$p(\overline{P} \cap \overline{M}) =$ "usando las leyes de Morgan" $= p(\overline{P \cup M}) = 1 - p(P \cup M) = 1 - (p(P) + p(M) - p(P \cap M)) = 1 - (0,4 + 0,06 - 0,04) = 0,58$, es decir, un 58%, por lo que la probabilidad de que al menos uno de los padres sea alcohólico es de un 42%.

NOTA: Puede resolverse de forma mucho más sencilla si recordamos que "al menos uno de los dos" es el suceso "unión", por lo que tan solo hemos de calcular $p(P \cup M) = 0,42$.

EJERCICIO 5

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cup B) = 0.6$. ¿Son **A y B independientes**? **(1,5 puntos)**

Para que A y B sean sucesos independientes se ha de verificar que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, por lo que hemos de calcular la probabilidad de la intersección, usando para ello la fórmula de la unión:

$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,6 = 0,2$.

$p(A \cap B) = 0,2$, $p(A) \cdot p(B) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$.

Dado que obviamente las dos probabilidades no son iguales, los sucesos A y B no son independientes.

EJERCICIO 6

De un total de 80 obras de un conocido pintor, tres cuartas partes son oleos y el resto acuarelas. Si elegimos dos de sus cuadros al azar, calcular:

a) **La probabilidad** de que al menos uno de ellos sea acuarela. **(0,5 puntos)**

b) **La probabilidad** de que haya una única acuarela. **(0,5 puntos)**

Sean $O_i =$ "la i-ésima obra es un óleo" y $A_i =$ "La i-ésima obra es una acuarela". Al seleccionar las dos obras es como si hiciéramos dos extracciones sin reeemplazamiento.

a) Nos piden la probabilidad de que al menos una de las obras seleccionadas sea una acuarela, es decir, solo una o las dos, por lo que es más fácil calcular el suceso contrario que es que ninguna de las dos sea una acuarela: $p(O_1 \cap O_2) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = 0,5601$, por lo que la probabilidad pedida será $1 - 0,5601 = 0,4399$.

b) En este apartado nos piden que haya una única acuarela: $p(A_1 \cap O_2) + p(O_1 \cap A_2) = \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} + \frac{60}{80} \cdot \frac{20}{79} = 0,3797$.

EJERCICIO 7

La probabilidad de aprobar la asignatura A es 2/3 y la de aprobar la asignatura B es 1/2. Además, la probabilidad de aprobar las dos es 1/4.

a) Hallar la **probabilidad de no aprobar ninguna** de las dos asignaturas. **(0,75 puntos)**

b) Calcular la **probabilidad de aprobar A, pero no B**. **(0,75 puntos)**

Sabemos que $p(A) = 2/3$, $p(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/4$.

a) Nos piden la probabilidad $p(\overline{A} \cap \overline{B})$ = "usando las leyes de Morgan" = $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B)) = 1 - (2/3 + 1/2 - 1/4) = 1 - 11/12 = 1/12$.

b) Nos piden $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 2/3 - 1/4 = 5/12$.

EJERCICIO 8

El 80 % de las familias españolas es propietaria de la casa que habitan. De ellas, el 70 % tiene una hipoteca sobre la misma. Se está realizando un estudio sobre la satisfacción de las familias respecto a la vivienda en la que residen. Se han obtenido los siguientes datos:

- Las familias con vivienda en propiedad y sin hipoteca están satisfechas en un 80 %.
- Las familias con vivienda en propiedad y con hipoteca están satisfechas en un 60 %.
- Las familias sin vivienda en propiedad están satisfechas en un 30 %.

a) Si se elige al azar una familia, ¿cuál es la probabilidad de que esté satisfecha con la vivienda en que reside? **(1 punto)**

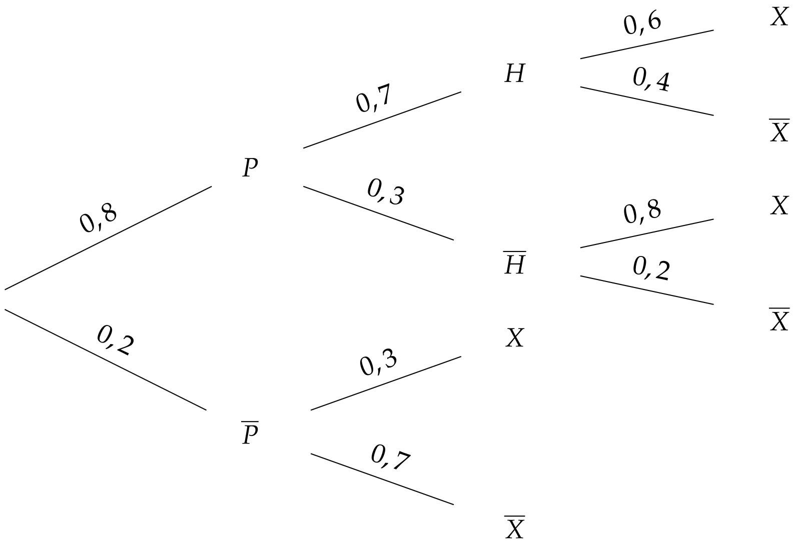
b) Si se elige al azar una familia, ¿cuál es la probabilidad de que esté satisfecha con la vivienda en que reside y que ésta sea en propiedad? **(1 punto)**

c) Sabiendo que una familia está satisfecha, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga vivienda en propiedad? **(1,5 puntos)**

Justificar las respuestas.

Hemos de definir tres sucesos: P = "la familia es propietaria de la casa que habita", H = "la familia tiene hipoteca" y X = "la familia está satisfecha respecto a la vivienda en la que residen".
Sabemos que $p(P) = 0,8$, $p(H/P) = 0,7$, por lo que $p(\overline{H}/P) = 0,3$, $P(X/P \cap \overline{H}) = 0,8$ y $P(X/P \cap H) = 0,6$ y $P(X/\overline{P}) = 0,3$.

En un diagrama de árbol tendríamos los siguiente:



a) Nos piden la probabilidad $p(X) = p(P \cap H \cap X) + p(P \cap \overline{H} \cap X) + p(\overline{P} \cap X) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,336 + 0,192 + 0,06 = 0,588$.

b) Nos piden $p(P \cap X) = p(P \cap H \cap X) + p(P \cap \overline{H} \cap X) = 0,336 + 0,192 = 0,528$.

c) Nos piden $p(\overline{P}/X) = \dfrac{p(\overline{P} \cap X)}{p(X)} = \dfrac{0,06}{0,588} = \dfrac{60}{588} = \dfrac{5}{49} = 0,102$.

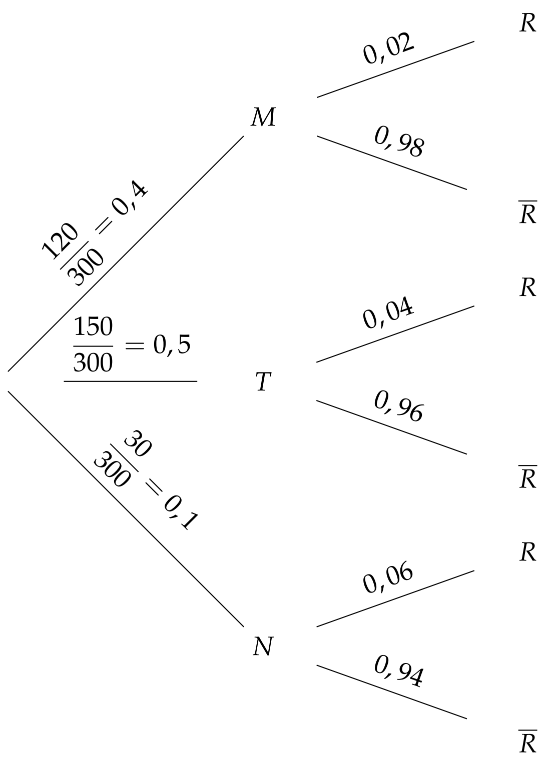
EJERCICIO 9

El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde 150 y por la noche 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde del 4 % y por la noche de un 6 %.

a) Calcula la **probabilidad de que se retrase** un vuelo con destino a este aeropuerto. **(1,5 puntos)**

b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la **probabilidad de que fuera un vuelo nocturno**? **(1,5 puntos)**

Denotamos por M, T y N que un vuelo llegue por la mañana, por la tarde o por la noche respectivamente y denotamos por R que llegue con retraso. El árbol correspondiente a este problema sería:



a) Nos piden la probabilidad $p(R) = p(M \cap R) + p(T \cap R) + p(N \cap R) = 0,4 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,06 = 0,008 + 0,02 + 0,006 = 0,034$, un 3,4%.

b) Nos piden $p(N/R) = \dfrac{p(N \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,006}{0,034} = \dfrac{6}{34} = \dfrac{3}{17} = 0,1765$.

EJERCICIO 10

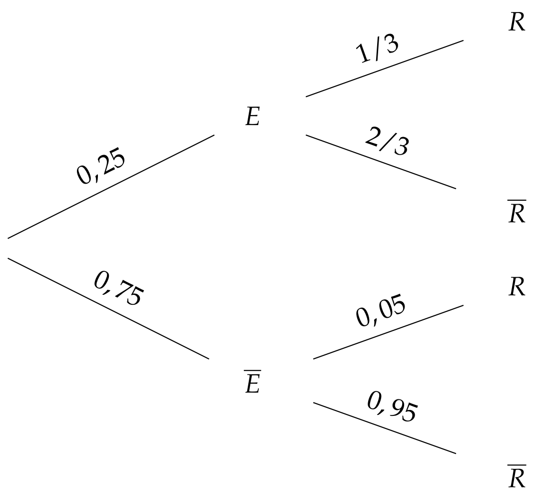
En un aeropuerto, 1/3 de los aviones que vienen del extranjero lo hacen con retraso, mientras que si proceden del propio país lo hacen con retraso el 5%. Si del extranjero vienen el 25% de los vuelos, se pide:

a) ¿Cuál es la **probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue con retraso**? **(1,35 puntos)**

b) Si un avión seleccionado al azar ha llegado sin retraso, ¿cuál es la **probabilidad de que venga del extranjero**? **(1 punto)**

c) ¿Cuál es la **probabilidad de que un vuelo seleccionado al azar llegue a su hora o provenga del extranjero**? **(1 punto)**

Denotamos por E al suceso que un vuelo provenga del extranjero y por R que venga con retraso. El árbol correspondiente a este problema sería:



a) Nos piden la probabilidad $p(R) = p(E \cap R) + p(\overline{E} \cap R) = 0,25 \cdot 1/3 + 0,75 \cdot 0,05 = 0,1208$, un 12,08%.

b) Nos piden $p(E/\overline{R}) = \dfrac{p(E \cap \overline{R})}{p(\overline{R})} = \dfrac{0,25 \cdot 2/3}{0,8792} = \dfrac{0,1667}{0,8792} = 0,1896$.

c) Nos piden $p(\overline{R} \cup E) = p(\overline{R}) + p(E) - p(\overline{R} \cap E) = 0,8792 + 0,25 - 0,25 \cdot \dfrac{2}{3} = 0,9625$.