

## 1. Forma binómica del número complejo

### ■ Piensa y calcula

Halla mentalmente cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales.

a)  $x^2 - 25 = 0$

b)  $x^2 + 9 = 0$

**Solución:**

a) Tiene dos soluciones: 5 y -5

b) No tiene solución real.

### ● Aplica la teoría

1. Completa con equis las casillas a las que pertenecen los siguientes números.

Números	N	Z	Q	R	C
3/4			×	×	×
2 + 5i					
-4					
$\pi$					
$\sqrt{5}$					
23					

**Solución:**

Números	N	Z	Q	R	C
3/4			×	×	×
2 + 5i					×
-4		×	×	×	×
$\pi$				×	×
$\sqrt{5}$				×	×
23	×	×	×	×	×

2. Escribe cinco números complejos que no sean reales.

**Solución:**

$2 + 3i, 5i, \sqrt{-4}, 3 - 4i, \sqrt[4]{-7}$

3. Escribe cinco números imaginarios puros.

**Solución:**

$i, 3i, -3i, 5i, -5i$

4. Halla mentalmente las siguientes raíces:

a)  $\sqrt{16}$

b)  $\sqrt{-25}$

**Solución:**

a)  $\pm 4$

b)  $\pm 5i$

5. Calcula mentalmente  $x$  e  $y$  para que los siguientes números complejos sean iguales:

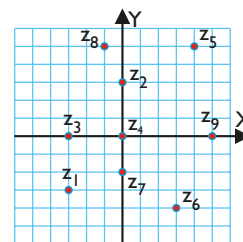
$$z_1 = x - 4i$$

$$z_2 = -3 - yi$$

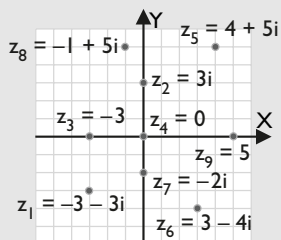
**Solución:**

$x = -3, y = 4$

6. Halla los números complejos representados en el siguiente plano de Gauss por sus afijos:



**Solución:**

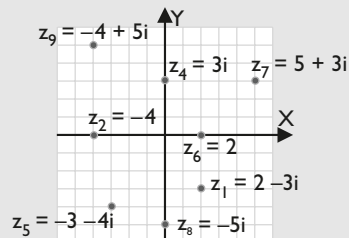


- $z_1 = -3 - 3i$
- $z_2 = 3i$
- $z_3 = -3$
- $z_4 = 0$
- $z_5 = 4 + 5i$
- $z_6 = 3 - 4i$
- $z_7 = -2i$
- $z_8 = -1 + 5i$
- $z_9 = 5$

**7.** Representa los afijos de los siguientes números complejos en el plano de Gauss.

- a)  $z_1 = 2 - 3i$
- b)  $z_2 = -4$
- c)  $z_3 = -4 + 5i$
- d)  $z_4 = 3i$
- e)  $z_5 = -3 - 4i$
- f)  $z_6 = 2$
- g)  $z_7 = 5 + 3i$
- h)  $z_8 = -5i$

**Solución:**

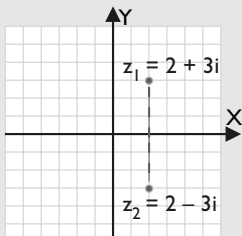


## 2. Operaciones en forma binómica

### ■ Piensa y calcula

Las raíces de la ecuación de 2º grado  $x^2 - 4x + 13 = 0$  son  $x_1 = 2 + 3i$ ,  $x_2 = 2 - 3i$ . Representálas en el plano de Gauss. ¿Respecto de qué recta son simétricas?

**Solución:**



Son simétricas respecto del eje de abscisas, X

### ● Aplica la teoría

**8.** Sean  $z_1 = 3 - 4i$ ,  $z_2 = -2 + 5i$

Calcula:

- a)  $z_1 + z_2$
- b)  $z_1 - z_2$
- c)  $2z_1 - 5z_2$
- d)  $-3z_1 + 4z_2$

**Solución:**

- a)  $1 + i$
- b)  $5 - 9i$
- c)  $16 - 33i$
- d)  $-17 + 32i$

**9.** Sean  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 4 - 2i$ ,  $z_3 = -1 + 6i$

Calcula:

- a)  $z_1 \cdot z_2$
- b)  $z_1 \cdot z_3$
- c)  $z_2 \cdot z_3$

**Solución:**

- a)  $22 + 14i$
- b)  $-33 + 13i$
- c)  $8 + 26i$

10. Calcula:

- a)  $(3 + 2i)^2$                       b)  $(-4 + 7i)^2$   
 c)  $(2 - i)^2$                       d)  $(1 + i)^2$

**Solución:**

- a)  $5 + 12i$                       b)  $-33 - 56i$   
 c)  $3 - 4i$                       d)  $2i$

11. Sea  $z = 4 - 3i$ . Calcula:

- a) el opuesto de  $z$               b) el conjugado de  $z$   
 c) el inverso de  $z$               d) el producto  $z \cdot \bar{z}$

**Solución:**

- a)  $-z = -4 + 3i$                       b)  $\bar{z} = 4 + 3i$   
 c)  $z^{-1} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$                       d)  $z \cdot \bar{z} = 25$

12. Sea  $z_1 = 2 + 6i, z_2 = 3 - i, z_3 = -4 + 5i$

Calcula:

- a)  $z_1/z_2$                       b)  $z_1/z_3$                       c)  $z_2/z_3$

**Solución:**

- a)  $2i$                       b)  $\frac{22}{41} - \frac{34}{41}i$                       c)  $-\frac{17}{41} - \frac{11}{41}i$

13. Calcula las siguientes potencias:

- a)  $i^{259}$                       b)  $i^{342}$                       c)  $i^{372}$                       d)  $i^{109}$

**Solución:**

- a)  $-i$                       b)  $-1$                       c)  $1$                       d)  $i$

14. Dado el número complejo  $z = 3 + 5i$ , calcula:

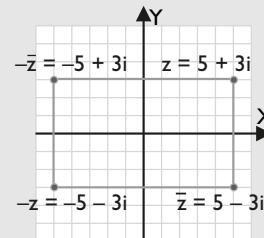
$$z \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$$

**Solución:**

$$3 - 5i$$

15. Dibuja un rectángulo de centro el origen de coordenadas y lados paralelos a los ejes, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo  $z = 5 + 3i$ . Halla las coordenadas de los otros tres vértices en función del opuesto y/o del conjugado de  $z$

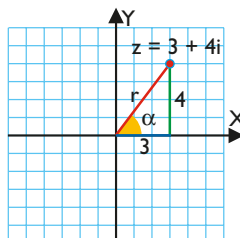
**Solución:**



### 3. Forma polar del número complejo

#### ■ Piensa y calcula

Dado el número complejo  $z = 3 + 4i$ , halla mentalmente la longitud de la hipotenusa,  $r$ , del triángulo rectángulo siguiente, la tangente del ángulo  $\alpha$  y, utilizando la calculadora, el ángulo  $\alpha$



**Solución:**

$$r = 5 \qquad \text{tg } \alpha = 4/3 \Rightarrow \alpha = 53^\circ 7' 48''$$

## ● Aplica la teoría

16. Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes números complejos y pásalos a forma polar.

- a)  $z_1 = 5i$
- b)  $z_2 = -6$
- c)  $z_3 = -3i$
- d)  $z_4 = 4$

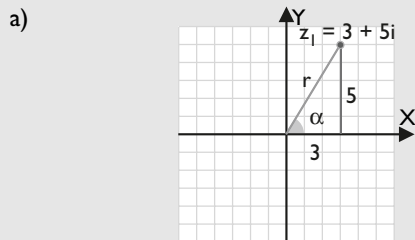
**Solución:**

- a)  $5_{90^\circ}$
- b)  $6_{180^\circ}$
- c)  $3_{270^\circ}$
- d)  $4_{0^\circ}$

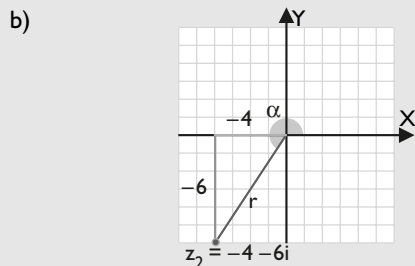
17. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma polar y trigonométrica.

- a)  $z_1 = 3 + 5i$
- b)  $z_2 = -4 - 6i$
- c)  $z_3 = -3 + 2i$
- d)  $z_4 = 2 - 5i$

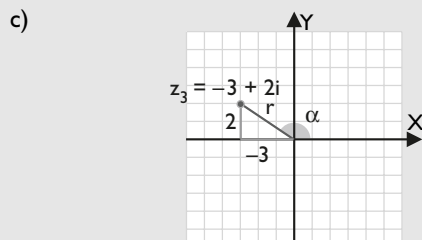
**Solución:**



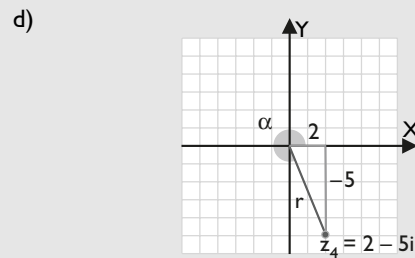
$$z_1 = (\sqrt{34})_{59^\circ 2' 10''} = \sqrt{34}(\cos 59^\circ 2' 10'' + i \operatorname{sen} 59^\circ 2' 10'')$$



$$z_2 = (2\sqrt{13})_{236^\circ 18' 36''} = 2\sqrt{13}(\cos 236^\circ 18' 36'' + i \operatorname{sen} 236^\circ 18' 36'')$$



$$z_3 = (\sqrt{13})_{146^\circ 18' 36''} = \sqrt{13}(\cos 146^\circ 18' 36'' + i \operatorname{sen} 146^\circ 18' 36'')$$

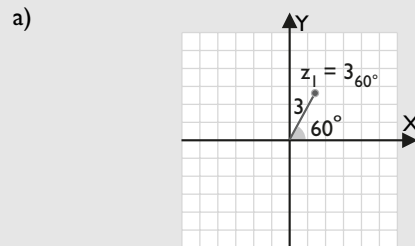


$$z_4 = (\sqrt{29})_{291^\circ 48' 5''} = \sqrt{29}(\cos 291^\circ 48' 5'' + i \operatorname{sen} 291^\circ 48' 5'')$$

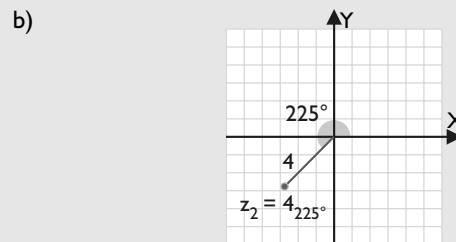
18. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma trigonométrica y binómica.

- a)  $z_1 = 3_{60^\circ}$
- b)  $z_2 = 4_{225^\circ}$
- c)  $z_3 = 5_{330^\circ}$
- d)  $z_4 = 6_{150^\circ}$

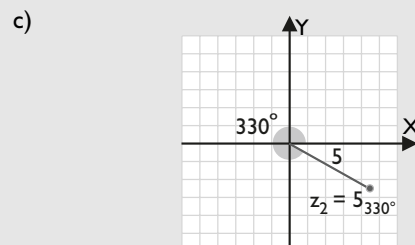
**Solución:**



$$z_1 = 3(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

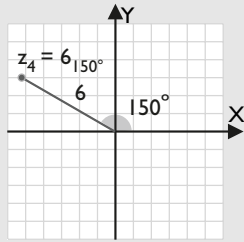


$$z_2 = 4(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$$



$$z_3 = 5(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

d)



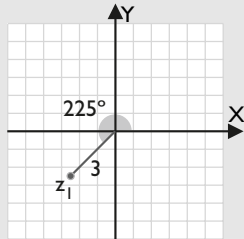
$$z_4 = 6(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 6 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -3\sqrt{3} + 3i$$

19. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos y pásalos a forma polar y binómica.

- a)  $z_1 = 3(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$
- b)  $z_2 = 2(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$
- c)  $z_3 = 4(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$
- d)  $z_4 = 5(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$

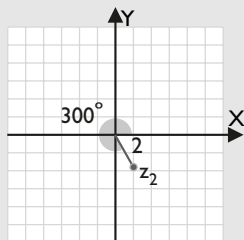
**Solución:**

a)



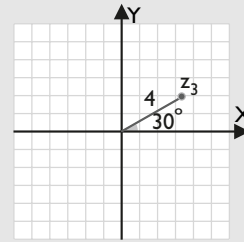
$$z_1 = 3_{225^\circ} = 3 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

b)



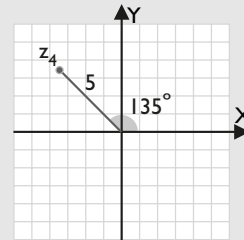
$$z_2 = 2_{300^\circ} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

c)



$$z_3 = 4_{30^\circ} = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

d)

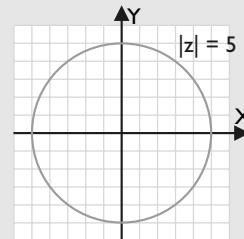


$$z_4 = 5_{135^\circ} = 5 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

20. Define y representa el lugar geométrico definido por:

$$|z| = 5$$

**Solución:**



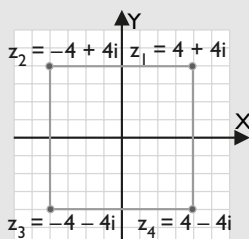
Es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 5

## 4. Operaciones en forma polar

### ■ Piensa y calcula

Dado el número complejo  $z = 4 + 4i$ , multiplica reiteradamente tres veces por  $i$ . Representa en el plano de Gauss el número complejo  $z = 4 + 4i$  y los tres números complejos que has obtenido. Une mediante un segmento cada afijo con el siguiente, y el último con el primero. ¿Qué figura se obtiene?

**Solución:**



Se obtiene un cuadrado.

### ● Aplica la teoría

21. Sean  $z_1 = 2_{120^\circ}$ ,  $z_2 = 3_{210^\circ}$ ,  $z_3 = 4_{315^\circ}$

Calcula:

- a)  $z_1 \cdot z_2$       b)  $z_1 \cdot z_3$       c)  $z_2 \cdot z_3$

**Solución:**

- a)  $6_{330^\circ}$       b)  $8_{75^\circ}$       c)  $12_{165^\circ}$

22. Sean  $z_1 = 6_{225^\circ}$ ,  $z_2 = 3_{150^\circ}$ ,  $z_3 = 2_{300^\circ}$

Calcula:

- a)  $z_1/z_2$       b)  $z_1/z_3$       c)  $z_2/z_3$

**Solución:**

- a)  $2_{75^\circ}$       b)  $3_{285^\circ}$       c)  $1,5_{210^\circ}$

23. Sean  $z_1 = 5_{150^\circ}$ ,  $z_2 = 3_{225^\circ}$ ,  $z_3 = 2_{45^\circ}$

Calcula:

- a)  $z_1^3$       b)  $z_2^4$       c)  $z_3^5$

**Solución:**

- a)  $125_{90^\circ}$       b)  $81_{180^\circ}$       c)  $32_{225^\circ}$

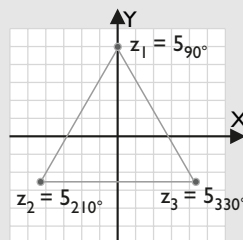
24. Un triángulo equilátero de centro el origen de coordenadas tiene un vértice en el punto  $A(0, 5)$ . Halla las coordenadas de los otros dos vértices y dibuja dicho triángulo.

**Solución:**

$$z_1 = 5i = 5_{90^\circ}$$

$$z_2 = 5_{90^\circ} \cdot 1_{120^\circ} = 5_{210^\circ}$$

$$z_3 = 5_{210^\circ} \cdot 1_{120^\circ} = 5_{330^\circ}$$



## 5. Radicación de números complejos

### ■ Piensa y calcula

- a) Calcula mentalmente  $\sqrt[4]{1}$ . ¿Cuántas raíces tiene?  
 b) Observando que  $\sqrt[4]{1} = \sqrt{\sqrt{1}}$ , calcula mentalmente  $\sqrt[4]{1}$ . ¿Cuántas raíces tiene?

**Solución:**

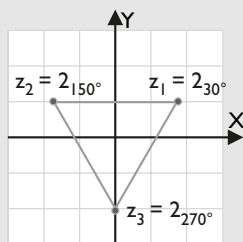
- a)  $1$  y  $-1$ , tiene dos raíces.      b)  $1, -1, i$  y  $-i$ , tiene cuatro raíces.

### ● Aplica la teoría

25. Halla las raíces cúbicas de  $z = 8i$ ; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

**Solución:**

$$\begin{aligned} z &= 8_{90^\circ} \\ z_1 &= 2_{30^\circ} \\ z_2 &= 2_{150^\circ} \\ z_3 &= 2_{270^\circ} \end{aligned}$$

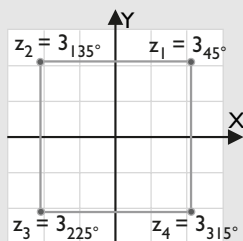


Se obtiene un triángulo equilátero.

26. Halla las raíces cuartas de  $z = -8i$ ; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

**Solución:**

$$\begin{aligned} z &= 8i_{180^\circ} \\ z_1 &= 3_{45^\circ} \\ z_2 &= 3_{135^\circ} \\ z_3 &= 3_{225^\circ} \\ z_4 &= 3_{315^\circ} \end{aligned}$$

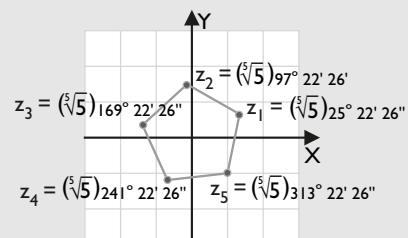


Se obtiene un cuadrado.

27. Halla las raíces quintas de  $z = -3 + 4i$ ; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

**Solución:**

$$\begin{aligned} z &= 5_{126^\circ 52' 12''} \\ z_1 &= (\sqrt[5]{5})_{25^\circ 22' 26''} \\ z_2 &= (\sqrt[5]{5})_{97^\circ 22' 26''} \\ z_3 &= (\sqrt[5]{5})_{169^\circ 22' 26''} \\ z_4 &= (\sqrt[5]{5})_{241^\circ 22' 26''} \\ z_5 &= (\sqrt[5]{5})_{313^\circ 22' 26''} \end{aligned}$$



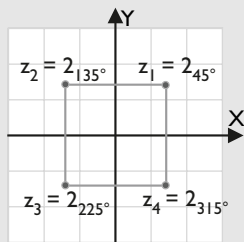
Se obtiene un pentágono regular.

28. Resuelve las ecuaciones siguientes; representa las raíces gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

- a)  $z^4 + 16 = 0$   
 b)  $z^4 - 16i = 0$

**Solución:**

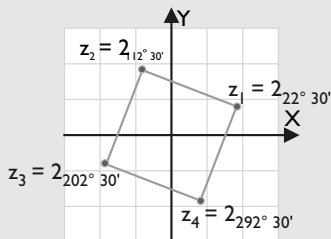
$$\begin{aligned} \text{a) } z^4 + 16 = 0 &\Rightarrow z = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}_{180^\circ} \\ z_1 &= 2_{45^\circ} \\ z_2 &= 2_{135^\circ} \\ z_3 &= 2_{225^\circ} \\ z_4 &= 2_{315^\circ} \end{aligned}$$



Se obtiene un cuadrado.

b)  $z^4 - 16i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{i}$

- $z_1 = 2_{22^\circ 30'}$
- $z_2 = 2_{112^\circ 30'}$
- $z_3 = 2_{202^\circ 30'}$
- $z_4 = 2_{292^\circ 30'}$



Se obtiene un cuadrado.

29. Resuelve la ecuación:  $x^2 + 6x + 10 = 0$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

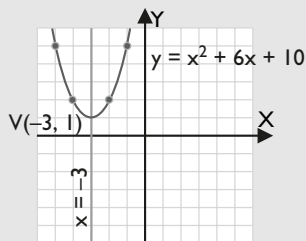
- b) halla el vértice.
- c) halla el eje de simetría.
- d) Representála.

**Solución:**

$x_1 = -3 + i$

$x_2 = -3 - i$

- a) Las raíces son complejas conjugadas.
- b)  $V(-3, 1)$
- c)  $x = -3$
- d)



30. Halla una ecuación de 2º grado que tenga las raíces:  $2 \pm 3i$

**Solución:**

$(x - 2)^2 + 3^2 = 0$

$x^2 - 4x + 13 = 0$

31. Halla una ecuación de 2º grado que tenga las raíces:  $6 \pm \sqrt{5}i$

**Solución:**

$(x - 6)^2 + (\sqrt{5})^2 = 0$

$x^2 - 12x + 41 = 0$

32. Resuelve la ecuación:

$x^2 - 2x + 3 = 0$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

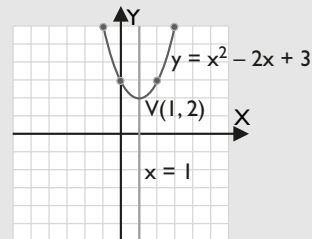
- b) halla el vértice.
- c) halla el eje de simetría.
- d) Representála.

**Solución:**

$x_1 = 1 + \sqrt{2}i$

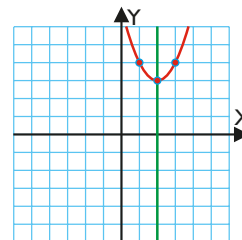
$x_2 = 1 - \sqrt{2}i$

- a) Las raíces son complejas conjugadas.
- b)  $V(1, 2)$
- c)  $x = 1$
- d)



33. Dado el dibujo de la parábola siguiente, halla:

- a) el vértice.
- b) las raíces.
- c) la ecuación de la parábola.



**Solución:**

a)  $V(2, 3)$

b)  $x_1 = 2 + \sqrt{3}i, x_2 = 2 - \sqrt{3}i$

c)  $(x - 2)^2 + 3 = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 7$



# Ejercicios y problemas

## 1. Forma binómica del número complejo

34. Completa con equis las casillas a las que pertenecen los siguientes números.

Números	N	Z	Q	R	C
-7		×	×	×	×
$\sqrt{-13}$					×
$-6/5$			×	×	×
$2 + 5i$					×
28	×	×	×	×	×
e				×	×

**Solución:**

Números	N	Z	Q	R	C
-7		×	×	×	×
$\sqrt{-13}$					×
$-6/5$			×	×	×
$2 + 5i$					×
28	×	×	×	×	×
e				×	×

35. Escribe cinco números complejos que no sean reales.

**Solución:**

$$4 + 5i, -7i, \sqrt{-5}, -2 - 3i, \sqrt[6]{-43}$$

36. Escribe cinco números imaginarios puros.

**Solución:**

$$7i, -2i, 4i, 9i, -9i$$

37. Halla mentalmente las siguientes raíces:

- a)  $\sqrt{36}$   
b)  $\sqrt{-64}$

**Solución:**

- a)  $\pm 6$   
b)  $\pm 8i$

38. Calcula mentalmente  $x$  e  $y$  para que los siguientes números complejos sean iguales:

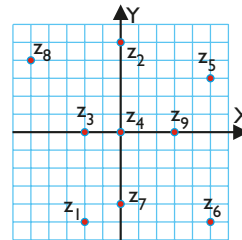
$$z_1 = 8 - xi$$

$$z_2 = y - 5i$$

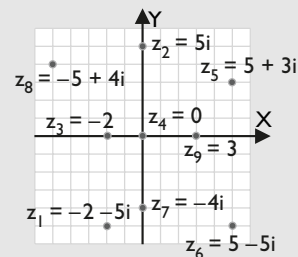
**Solución:**

$$x = 5, y = 8$$

39. Halla los números complejos representados en el siguiente plano de Gauss por sus afijos:



**Solución:**



$$z_1 = -2 - 5i \quad z_2 = 5i \quad z_3 = -2$$

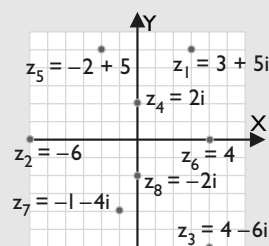
$$z_4 = 0 \quad z_5 = 5 + 3i \quad z_6 = 5 - 5i$$

$$z_7 = -4i \quad z_8 = -5 + 4i \quad z_9 = 3$$

40. Representa los afijos de los siguientes números complejos en el plano de Gauss.

- a)  $z_1 = 3 + 5i$                       b)  $z_2 = -6$   
c)  $z_3 = 4 - 6i$                     d)  $z_4 = 2i$   
e)  $z_5 = -2 + 5i$                     f)  $z_6 = 4$   
g)  $z_7 = -1 - 4i$                     h)  $z_8 = -2i$

**Solución:**



## 2. Operaciones en forma binómica

41. Sean  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = 5 - 4i$

Calcula:

- a)  $z_1 + z_2$                       b)  $z_1 - z_2$   
c)  $3z_1 - 4z_2$                     d)  $-5z_1 + 2z_2$

**Solución:**

$$a) 7 - 7i \quad b) -3 + i \quad c) -14 + 7i \quad d) 7i$$

42. Sean  $z_1 = 5 - 2i$ ,  $z_2 = -3 + i$ ,  $z_3 = 6 - 4i$

Calcula:

- a)  $z_1 \cdot z_2$       b)  $z_1 \cdot z_3$       c)  $z_2 \cdot z_3$

**Solución:**

- a)  $-13 + 11i$       b)  $22 - 32i$       c)  $-14 + 18i$

43. Calcula:

- a)  $(4 + i)^2$       b)  $(-5 + 2i)^2$   
c)  $(3 - 3i)^2$       d)  $(6 + i)^2$

**Solución:**

- a)  $15 + 8i$       b)  $21 - 20i$   
c)  $-18i$       d)  $35 + 12i$

44. Sea  $z = -5 + 2i$

Calcula:

- a) el opuesto de  $z$   
b) el conjugado de  $z$   
c) el inverso de  $z$   
d) el producto  $z \cdot \bar{z}$

**Solución:**

- a)  $-z = 5 - 2i$   
b)  $\bar{z} = -5 - 2i$   
c)  $z^{-1} = -\frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$   
d)  $z \cdot \bar{z} = 29$

45. Sean  $z_1 = 3 - 5i$ ,  $z_2 = 2 + i$ ,  $z_3 = -6 + 4i$

Calcula:

- a)  $z_1/z_2$       b)  $z_1/z_3$       c)  $z_2/z_3$

**Solución:**

- a)  $\frac{1}{5} - \frac{13}{5}i$   
b)  $-\frac{19}{26} + \frac{9}{26}i$   
c)  $-\frac{2}{13} - \frac{7}{26}i$

46. Calcula las siguientes potencias:

- a)  $i^{159}$       b)  $i^{242}$       c)  $i^{272}$       d)  $i^{209}$

**Solución:**

- a)  $-i$       b)  $-1$       c)  $1$       d)  $i$

47. Dado el número complejo  $z = 4 - 5i$ , calcula:  $z \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$

**Solución:**

$4 + 5i$

### 3. Forma polar del número complejo

48. Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, y pásalos a forma polar.

- a)  $z_1 = -4$   
b)  $z_2 = 5i$   
c)  $z_3 = -2i$   
d)  $z_4 = 3$

**Solución:**

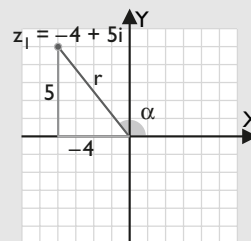
- a)  $4_{180^\circ}$       b)  $5_{90^\circ}$       c)  $2_{270^\circ}$       d)  $3_{0^\circ}$

49. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos, y pásalos a forma polar y trigonométrica.

- a)  $z_1 = -4 + 5i$   
b)  $z_2 = 3 - 2i$   
c)  $z_3 = -6 - i$   
d)  $z_4 = 1 + 5i$

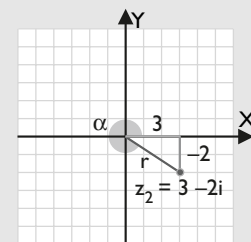
**Solución:**

a)



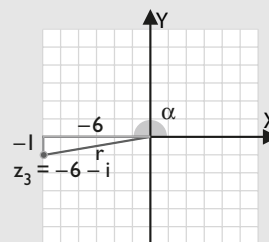
$$z_1 = (\sqrt{41})_{128^\circ 39' 35''} = \sqrt{41}(\cos 128^\circ 39' 35'' + i \operatorname{sen} 128^\circ 39' 35'')$$

b)



$$z_2 = (\sqrt{13})_{326^\circ 18' 36''} = \sqrt{13}(\cos 326^\circ 18' 36'' + i \operatorname{sen} 326^\circ 18' 36'')$$

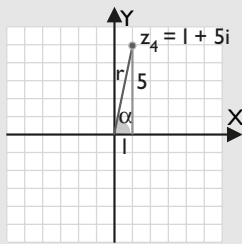
c)



$$z_3 = (\sqrt{37})_{189^\circ 27' 44''} = \sqrt{37}(\cos 189^\circ 27' 44'' + i \operatorname{sen} 189^\circ 27' 44'')$$

# Ejercicios y problemas

d)



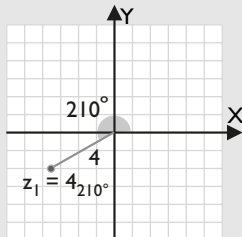
$$z_4 = (\sqrt{26})_{78^\circ 41' 24''} = \sqrt{26}(\cos 78^\circ 41' 24'' + i \operatorname{sen} 78^\circ 41' 24'')$$

50. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos, y pásalos a forma trigonométrica y binómica.

- a)  $z_1 = 4_{210^\circ}$       b)  $z_2 = 5_{135^\circ}$   
 c)  $z_3 = 6_{30^\circ}$       d)  $z_4 = 3_{315^\circ}$

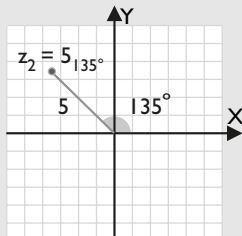
**Solución:**

a)



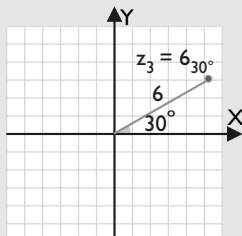
$$z_1 = 4(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$$

b)



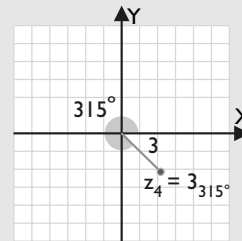
$$z_2 = 5(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

c)



$$z_3 = 6(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$$

d)



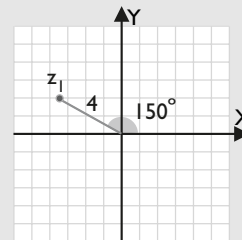
$$z_4 = 3(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

51. Representa en el plano de Gauss los siguientes números complejos, y pásalos a forma polar y binómica.

- a)  $z_1 = 4(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$   
 b)  $z_2 = 3(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$   
 c)  $z_3 = 2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$   
 d)  $z_4 = 5(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

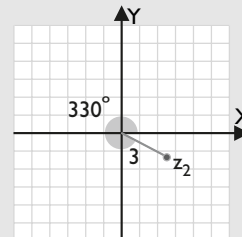
**Solución:**

a)



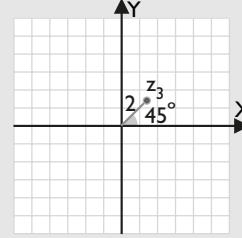
$$z_1 = 4_{150^\circ} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

b)



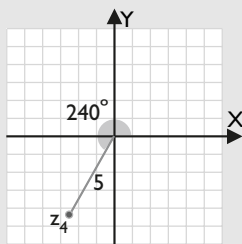
$$z_2 = 3_{330^\circ} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

c)



$$z_3 = 2_{45^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

d)

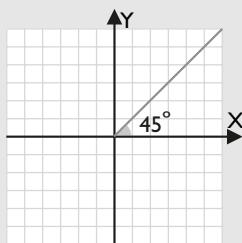


$$z_4 = 5_{240^\circ} = 5 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

52. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de argumento  $45^\circ$

**Solución:**

Es una semirrecta, que nace en el origen de coordenadas  $O(0, 0)$ , y el ángulo formado por el semieje positivo de las  $X$  y dicha semirrecta tiene una amplitud de  $45^\circ$ ; es decir, es la bisectriz del primer cuadrante.

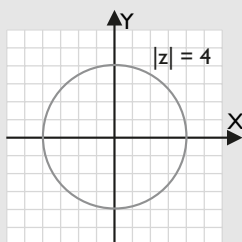


53. Define y representa el lugar geométrico definido por:

$$|z| = 4$$

**Solución:**

Es una circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 4



#### 4. Operaciones en forma polar

54. Sean  $z_1 = 4_{60^\circ}$ ,  $z_2 = 5_{240^\circ}$ ,  $z_3 = 6_{300^\circ}$

Calcula:

- a)  $z_1 \cdot z_2$       b)  $z_1 \cdot z_3$       c)  $z_2 \cdot z_3$

**Solución:**

- a)  $20_{300^\circ}$       b)  $24_0^\circ$       c)  $30_{180^\circ}$

55. Sean  $z_1 = 8_{45^\circ}$ ,  $z_2 = 4_{210^\circ}$ ,  $z_3 = 2_{330^\circ}$

Calcula:

- a)  $z_1/z_2$       b)  $z_1/z_3$       c)  $z_2/z_3$

**Solución:**

- a)  $2_{195^\circ}$       b)  $4_{75^\circ}$       c)  $2_{240^\circ}$

56. Sean  $z_1 = 6_{120^\circ}$ ,  $z_2 = 5_{315^\circ}$ ,  $z_3 = 3_{225^\circ}$

Calcula:

- a)  $z_1^3$       b)  $z_2^4$       c)  $z_3^5$

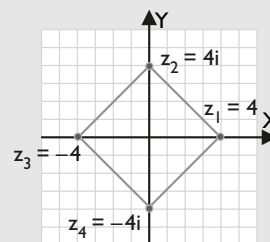
**Solución:**

- a)  $216_0^\circ$       b)  $625_{180^\circ}$       c)  $243_{45^\circ}$

57. Un cuadrado de centro el origen de coordenadas tiene un vértice en el punto  $A(4, 0)$ . Halla las coordenadas de los otros vértices y dibuja dicho cuadrado.

**Solución:**

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 = 4_0^\circ \\ z_2 &= 4_0^\circ \cdot i_{90^\circ} = 4_{90^\circ} = 4i \\ z_3 &= 4_{90^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 4_{180^\circ} = -4 \\ z_4 &= 4_{180^\circ} \cdot i_{90^\circ} = 4_{270^\circ} = -4i \end{aligned}$$

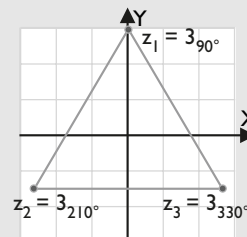


#### 5. Radicación de números complejos

58. Halla las raíces cúbicas de  $z = -27i$ ; represéntalas gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

**Solución:**

$$\begin{aligned} z &= 27_{270^\circ} \\ z_1 &= 3_{90^\circ} \\ z_2 &= 3_{210^\circ} \\ z_3 &= 3_{330^\circ} \end{aligned}$$



Se obtiene un triángulo equilátero.

# Ejercicios y problemas

59. Halla las raíces cuartas de  $z = 16$ ; represéntalas gráficamente y una mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

**Solución:**

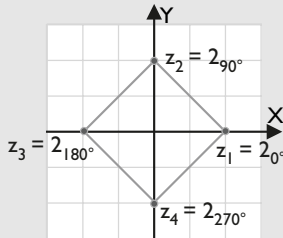
$$z = 16_0^\circ$$

$$z_1 = 2_0^\circ$$

$$z_2 = 2_{90^\circ}$$

$$z_3 = 2_{180^\circ}$$

$$z_4 = 2_{270^\circ}$$



Se obtiene un cuadrado.

60. Halla las raíces quintas de  $z = 3 + 5i$ ; represéntalas gráficamente y una mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

**Solución:**

$$z = (\sqrt[10]{34})_{59^\circ 2' 10''}$$

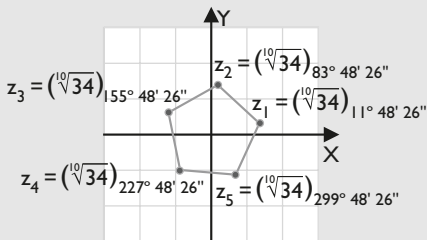
$$z_1 = (\sqrt[10]{34})_{11^\circ 48' 26''}$$

$$z_2 = (\sqrt[10]{34})_{83^\circ 48' 26''}$$

$$z_3 = (\sqrt[10]{34})_{155^\circ 48' 26''}$$

$$z_4 = (\sqrt[10]{34})_{227^\circ 48' 26''}$$

$$z_5 = (\sqrt[10]{34})_{299^\circ 48' 26''}$$



Se obtiene un pentágono regular.

61. Resuelve las ecuaciones siguientes; representa las raíces gráficamente y una mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

a)  $z^4 - 81 = 0$

b)  $z^4 + 16i = 0$

**Solución:**

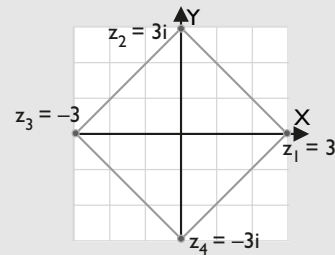
a)  $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z^4 = 81 \Rightarrow z = \sqrt[4]{81}$

$$z_1 = 3$$

$$z_2 = 3i$$

$$z_3 = -3$$

$$z_4 = -3i$$



Se obtiene un cuadrado.

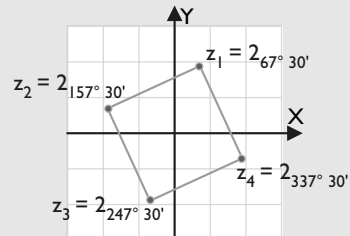
b)  $z_4 + 16i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16}_{270^\circ}$

$$z_1 = 2_{67^\circ 30'}$$

$$z_2 = 2_{157^\circ 30'}$$

$$z_3 = 2_{247^\circ 30'}$$

$$z_4 = 2_{337^\circ 30'}$$



Se obtiene un cuadrado.

62. Resuelve la ecuación:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

- a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

- b) halla el vértice.

- c) halla el eje de simetría.

- d) Representala.

**Solución:**

$$x_1 = 2 + i$$

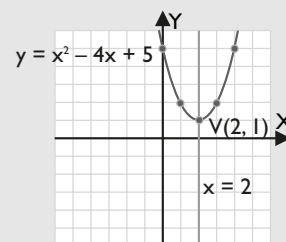
$$x_2 = 2 - i$$

- a) Son complejas conjugadas.

- b)  $V(2, 1)$

- c)  $x = 2$

- d)



63. Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

a) ¿Cómo son las raíces?

En la parábola correspondiente:

b) halla el vértice.

c) halla el eje de simetría.

d) Representála.

**Solución:**

$$x_1 = -2 + \sqrt{3}i$$

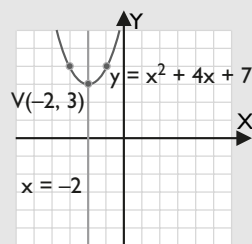
$$x_2 = -2 - \sqrt{3}i$$

a) Son complejas conjugadas.

b)  $V(-2, 3)$

c)  $x = -2$

d)



64. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces:  $3 \pm 5i$

**Solución:**

$$(x - 3)^2 + 5^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 34 = 0$$

65. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces:  $-2 \pm \sqrt{3}i$

**Solución:**

$$(x + 2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 7 = 0$$

## Para ampliar

66. Las raíces cuadradas de los números reales negativos, ¿qué clase de números son? Pon un ejemplo.

**Solución:**

Son números imaginarios puros.

Ejemplo:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$

67. La suma de un número complejo y su conjugado, ¿qué clase de número es? Pon un ejemplo.

**Solución:**

Es un número real.

Ejemplo:

$$z = 2 + 3i, \bar{z} = 2 - 3i$$

$$z + \bar{z} = 4$$

68. El producto de un número complejo y su conjugado, ¿qué clase de número es? Pon un ejemplo.

**Solución:**

Es un número real.

$$z = 4 + 5i, \bar{z} = 4 - 5i$$

$$z \cdot \bar{z} = 41$$

69. Dado el número complejo:

$$z = 3 + 5i$$

Calcula:

a) el conjugado del opuesto.

b) el opuesto del conjugado.

c) ¿qué relación hay entre los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores?

**Solución:**

a)  $-\bar{z} = -3 + 5i$

b)  $-\bar{z} = -3 + 5i$

c) Que son iguales.

70. Calcula  $x$  e  $y$  para que:

a)  $x + 2i + 5 - 3i = 7 + yi$

b)  $3 - 5i - 7 + yi = x + 2i$

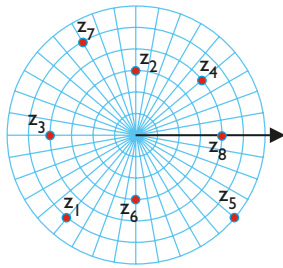
**Solución:**

a)  $x = 2, y = -1$

b)  $x = -4, y = 7$

# Ejercicios y problemas

71. Halla los números complejos representados en forma polar:



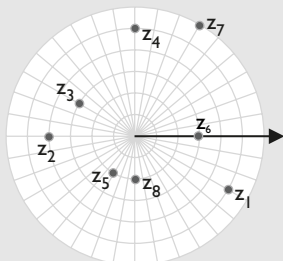
**Solución:**

$$\begin{array}{ll} z_1 = 5_{230^\circ} & z_2 = 3_{90^\circ} \\ z_3 = 4_{180^\circ} & z_4 = 4_{40^\circ} \\ z_5 = 6_{320^\circ} & z_6 = 3_{270^\circ} \\ z_7 = 5_{120^\circ} & z_8 = 4_0^\circ \end{array}$$

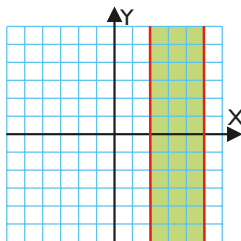
72. Representa los siguientes números complejos en el eje polar:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_1 = 5_{330^\circ} & \text{b) } z_2 = 4_{180^\circ} \\ \text{c) } z_3 = 3_{150^\circ} & \text{d) } z_4 = 5_{90^\circ} \\ \text{e) } z_5 = 2_{240^\circ} & \text{f) } z_6 = 3_0^\circ \\ \text{g) } z_7 = 6_{60^\circ} & \text{h) } z_8 = 2_{270^\circ} \end{array}$$

**Solución:**



73. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



**Solución:**

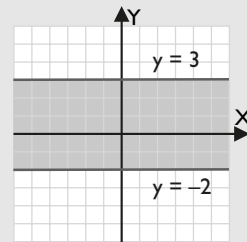
Que la parte real esté comprendida entre 2 y 5  
 $2 \leq \text{Real}(z) \leq 5$

74. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos cuya parte imaginaria está comprendida entre  $-2$  y  $3$

**Solución:**

Es una franja horizontal, los números complejos que están comprendidos entre las rectas  $y = -2$  e  $y = 3$ , incluidas las rectas.

$$-2 \leq \text{Imaginaria}(z) \leq 3$$



75. Si el producto de dos números complejos no reales es un número real, ¿qué relación hay entre sus argumentos? Pon un ejemplo.

**Solución:**

La suma de los argumentos tiene que ser  $180^\circ$  o  $360^\circ$

$$2_{60^\circ} \cdot 3_{120^\circ} = 6_{180^\circ} = -6$$

76. Resuelve las ecuaciones siguientes. Representa las raíces gráficamente y une mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

$$\begin{array}{l} \text{a) } z^6 - 1 = 0 \\ \text{b) } z^6 + i = 0 \end{array}$$

**Solución:**

$$\text{a) } z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_0^\circ}$$

$$z_1 = 1_0^\circ$$

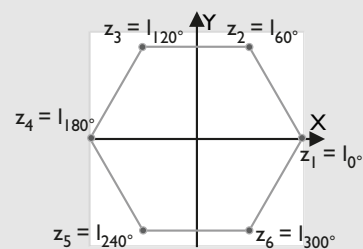
$$z_2 = 1_{60^\circ}$$

$$z_3 = 1_{120^\circ}$$

$$z_4 = 1_{180^\circ}$$

$$z_5 = 1_{240^\circ}$$

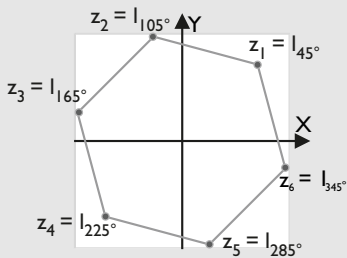
$$z_6 = 1_{300^\circ}$$



Se obtiene un hexágono regular.

b)  $z^6 + i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1_{270^\circ}}$

- $z_1 = 1_{45^\circ}$
- $z_2 = 1_{105^\circ}$
- $z_3 = 1_{165^\circ}$
- $z_4 = 1_{225^\circ}$
- $z_5 = 1_{285^\circ}$
- $z_6 = 1_{345^\circ}$



Se obtiene un hexágono regular.

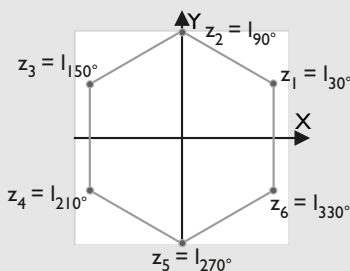
77. Resuelve las ecuaciones siguientes. Representa las raíces gráficamente y una mediante una línea poligonal los afijos obtenidos. ¿Qué polígono regular se obtiene?

- a)  $z^6 + 1 = 0$
- b)  $z^6 - i = 0$

**Solución:**

a)  $z^6 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}}$

- $z_1 = 1_{30^\circ}$
- $z_2 = 1_{90^\circ}$
- $z_3 = 1_{150^\circ}$
- $z_4 = 1_{210^\circ}$
- $z_5 = 1_{270^\circ}$
- $z_6 = 1_{330^\circ}$

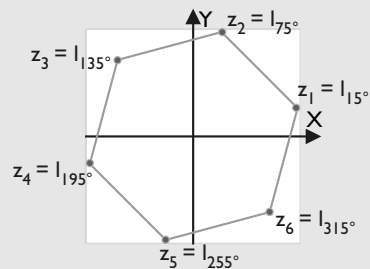


Se obtiene un hexágono regular.

b)  $z^6 - i = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1_{90^\circ}}$

- $z_1 = 1_{15^\circ}$
- $z_2 = 1_{75^\circ}$
- $z_3 = 1_{135^\circ}$
- $z_4 = 1_{195^\circ}$

- $z_5 = 1_{255^\circ}$
- $z_6 = 1_{315^\circ}$



Se obtiene un hexágono regular.

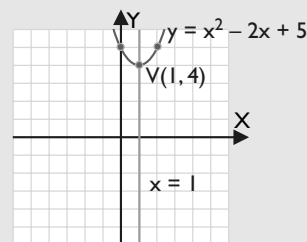
78. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto  $V(1, 4)$  y que no corta al eje de abscisas.

**Solución:**

Las raíces son:  $1 \pm 2i$

$$(x - 1)^2 + 2^2 = x^2 - 2x + 5$$

$$y = x^2 - 2x + 5$$



79. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a)  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$
- b)  $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

**Solución:**

- a)  $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3i, x_4 = -3i$
- b)  $x_1 = i, x_2 = -i, x_3 = 2i, x_4 = -2i$

80. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a)  $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
- b)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

**Solución:**

- a)  $x_1 = 2i, x_2 = -2i, x_3 = 3i, x_4 = -3i$
- b)  $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = i, x_4 = -i$



## Problemas

81. Halla un número que sumado con su inverso dé 1. ¿Qué tipo de números son el resultado?

**Solución:**

$$z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

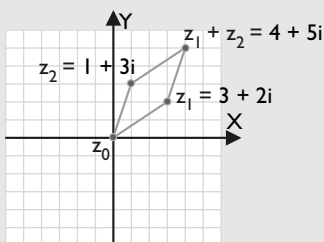
$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

El resultado son dos números complejos conjugados, tal que la suma de sus partes reales es uno.

82. Dados los números complejos  $z_0 = 0, z_1 = 3 + 2i, z_2 = 1 + 3i$ , halla  $z_1 + z_2$  y representa los afijos de  $z_0, z_1, z_2$  y  $z_1 + z_2$ . Únelos mediante segmentos en el siguiente orden:  $z_0, z_1, z_1 + z_2, z_2, z_0$ . ¿Qué polígono se obtiene?

**Solución:**

$$z_1 + z_2 = 4 + 5i$$



Se obtiene un paralelogramo; es equivalente a la suma de vectores.

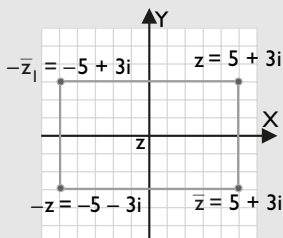
83. Dado el número complejo  $z = 5 + 3i$ , calcula el conjugado,  $\bar{z}$ , el opuesto,  $-z$ , y el opuesto del conjugado,  $-\bar{z}$ . Representa los cuatro números complejos en el plano de Gauss y únelos en el siguiente orden:  $z, \bar{z}, -z, -\bar{z}$ . ¿Qué polígono se obtiene?

**Solución:**

$$\bar{z} = 5 - 3i$$

$$-z = -5 - 3i$$

$$-\bar{z} = -5 + 3i$$



Se obtiene un rectángulo.

84. Resuelve la siguiente ecuación sabiendo que  $z$  es un número complejo:  $2z + 6 - 3i = 5z - 3 + 3i$

**Solución:**

$$z = 3 - 2i$$

85. Dados los números complejos  $z_1 = 4 + xi, z_2 = x - i$ , halla  $x$  para que  $z_1 \cdot z_2$  sea:

- a) un número real.  
b) un número imaginario puro.

**Solución:**

$$z_1 \cdot z_2 = 5x + (x^2 - 4)i$$

a)  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

b)  $5x = 0 \Rightarrow x = 0$

86. Dados los números complejos  $z_1 = 2 - 6i, z_2 = x + 3i$ , halla  $x$  para que  $z_1/z_2$  sea:

- a) un número real.  
b) un número imaginario puro.

**Solución:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2x - 18}{x^2 + 9} - \frac{6x + 6}{x^2 + 9}i$$

a)  $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

b)  $2x - 18 = 0 \Rightarrow x = 9$

87. Dado el número complejo  $z = x - 3i$ , halla  $x$  para que  $(x - 3i)^2$  sea:

- a) un número real.  
b) un número imaginario puro.

**Solución:**

$$(x - 3i)^2 = x^2 - 9 - 6xi$$

a)  $-6x = 0 \Rightarrow x = 0$

b)  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

88. Resuelve la siguiente ecuación:

$$(x - 5i)(3 + yi) = 22 - 7i$$

**Solución:**

$$3x + 5y + (xy - 15)i = 22 - 7i$$

Se transforma en el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 5y &= 22 \\ xy - 15 &= -7 \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 = 4, y_1 = 2$$

$$x_2 = 10/3, y_2 = 12/5$$

89. Dados los números complejos  $z_1 = x + i, z_2 = 2 + i$ , halla  $x$  para que el afijo de  $z_1 \cdot z_2$  esté en la bisectriz del 1<sup>er</sup> cuadrante.

**Solución:**

$$z_1 \cdot z_2 = 2x - 1 + (x + 2)i \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 1 = x + 2 \Rightarrow x = 3$$

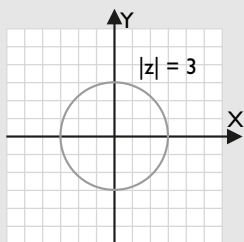
Comprobación:

$$z_1 \cdot z_2 = 5 + 5i$$

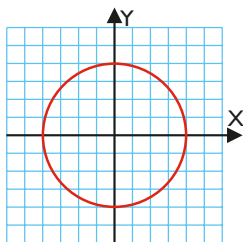
90. Define y representa el lugar geométrico definido por:  
 $|z| = 3$

**Solución:**

Es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 3



91. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



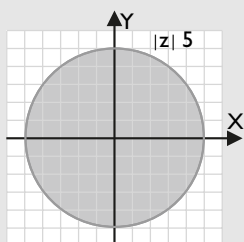
**Solución:**

Que su módulo sea 4  
 $|z| = 4$

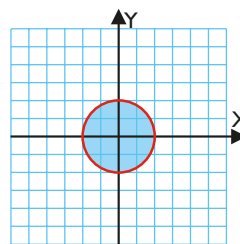
92. Define y representa el lugar geométrico definido por:  
 $|z| \leq 5$

**Solución:**

Es el círculo de centro el origen de coordenadas y radio 5, es decir, la circunferencia y su interior.



93. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



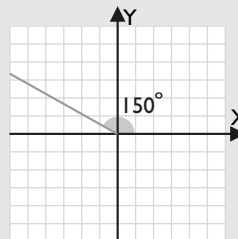
**Solución:**

Que su módulo sea menor o igual que 2  
 $|z| \leq 2$

94. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de argumento  $150^\circ$

**Solución:**

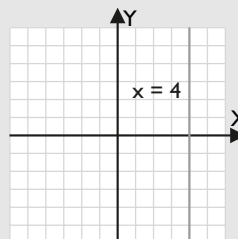
Es una semirrecta que nace en el origen de coordenadas, y el ángulo que forma el semieje positivo de las X con dicha semirrecta tiene de amplitud  $150^\circ$



95. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de parte real 4

**Solución:**

Es una recta vertical de abscisa 4

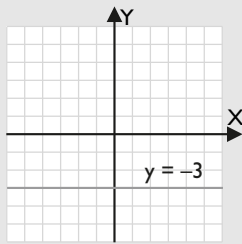


96. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos que tienen de parte imaginaria  $-3$

# Ejercicios y problemas

**Solución:**

Es una recta horizontal de ordenada  $-3$



97. Dado el número complejo:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

calcula  $z^{50}$ . Da el resultado en forma binómica.

**Solución:**

$$z = 1_{45^\circ}$$

$$z^{50} = (1_{45^\circ})^{50} = 1_{50 \cdot 45^\circ} = 1_{90^\circ} = i$$

98. Aplicando la fórmula de Moivre, expresa  $\sin 2\alpha$  y  $\cos 2\alpha$  en función del seno  $\alpha$  y del cos  $\alpha$ .

**Solución:**

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

Desarrollando el cuadrado del primer miembro e igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

99. Halla los vértices de un hexágono regular, sabiendo que uno de ellos es el punto  $A(5, 0)$

**Solución:**

$$A(5, 0) \Rightarrow z = 5_{0^\circ}$$

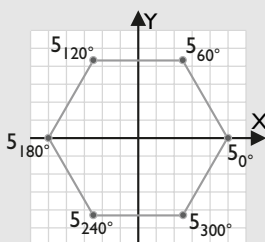
$$5_{0^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{60^\circ}$$

$$5_{60^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ}$$

$$5_{120^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{180^\circ}$$

$$5_{180^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{240^\circ}$$

$$5_{240^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = 5_{300^\circ}$$



100. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto  $V(3, 2)$  y que no corta al eje de abscisas.

**Solución:**

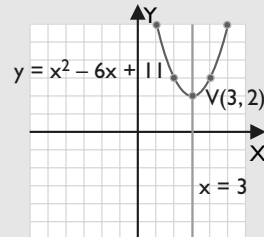
Las raíces son:

$$x_1 = 3 + \sqrt{2}i$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{2}i$$

$$(x - 3)^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 11 = 0$$

$$y = x^2 - 6x + 11$$



101. Halla las raíces cúbicas de  $i$  y de  $-i$ , represéntalas gráficamente en los mismos ejes coordenados y forma el polígono que se obtiene uniendo los afijos de cada una de las raíces.

**Solución:**

$$z = i = 1_{90^\circ}$$

$$z_1 = 1_{30^\circ}$$

$$z_2 = 1_{150^\circ}$$

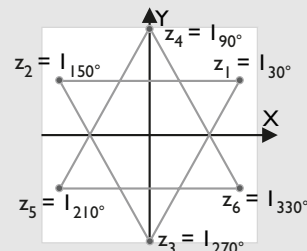
$$z_3 = 1_{270^\circ}$$

$$z = -i = 1_{270^\circ}$$

$$z_4 = 1_{90^\circ}$$

$$z_5 = 1_{210^\circ}$$

$$z_6 = 1_{330^\circ}$$



## Para profundizar

102. ¿En qué números complejos coincide su inverso con su conjugado? Representa gráficamente la solución.

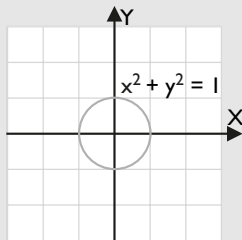
**Solución:**

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i = x - yi$$

Para que las partes reales e imaginarias sean iguales tiene que ser:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Son los números complejos que tienen de módulo uno, es decir, los números complejos que están sobre la circunferencia unidad.

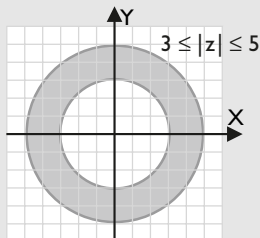


103. Define y representa el lugar geométrico determinado por:

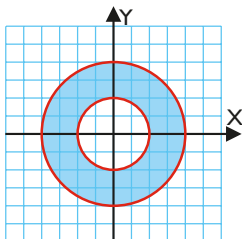
$$3 \leq |z| \leq 5$$

**Solución:**

Son los números complejos cuyo módulo está comprendido entre 3 y 5, es decir, una corona circular de radios 3 y 5, con el centro en el origen de coordenadas.



104. Escribe la condición que deben cumplir los números complejos representados en la siguiente figura:



**Solución:**

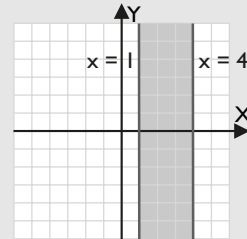
$$2 \leq |z| \leq 4$$

105. Define y representa el lugar geométrico de todos los números complejos cuya parte real está comprendida entre 1 y 4

**Solución:**

Es una franja vertical comprendida entre las rectas  $x = 1$  y  $x = 4$

$$1 \leq \text{Real}(z) \leq 4$$



106. Dado el número complejo:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

calcula  $z^{50}$ . Da el resultado en forma binómica.

**Solución:**

$$z = 1_{315^\circ}$$

$$z^{50} = (1_{315^\circ})^{50} = 1_{50 \cdot 315^\circ} = 1_{270^\circ} = -i$$

107. Si el cociente de dos números complejos no reales es un número real, ¿qué relación hay entre sus argumentos? Pon un ejemplo.

**Solución:**

La diferencia de sus argumentos tiene que ser  $0^\circ$  o  $180^\circ$

$$6_{30^\circ} : 2_{30^\circ} = 3_{0^\circ} = 3$$

$$6_{210^\circ} : 2_{30^\circ} = 3_{180^\circ} = -3$$

108. Halla un número complejo cuyo cuadrado sea un número real negativo.

**Solución:**

$$z = 5i$$

$$z^2 = -25$$

109. Halla un número complejo cuyo cuadrado sea un número imaginario puro.

**Solución:**

$$z = 3_{45^\circ}$$

$$z^2 = 9_{90^\circ} = 9i$$

110. Aplicando la fórmula de Moivre, expresa  $\sin 3\alpha$  y  $\cos 3\alpha$  en función del seno  $\alpha$  y del cos  $\alpha$ . Ten en cuenta que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

# Ejercicios y problemas

## Solución:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$$

Desarrollando el primer cubo e igualando las partes reales e imaginarias, se obtiene:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$$

111. Halla los vértices de un cuadrado de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto  $A(3, 4)$ . Haz el dibujo.

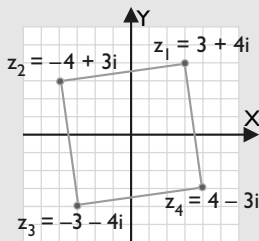
## Solución:

$$z_1 = 3 + 4i$$

$$z_2 = z_1 \cdot i = -4 + 3i$$

$$z_3 = z_2 \cdot i = -3 - 4i$$

$$z_4 = z_3 \cdot i = 4 - 3i$$



112. Halla los vértices de un pentágono regular sabiendo que uno de ellos es el punto  $A(0, 4)$

## Solución:

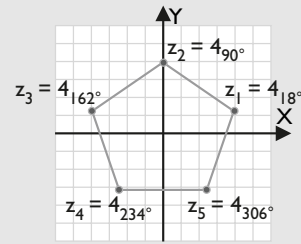
$$A(0, 4) \Rightarrow z = 4_{90^\circ}$$

$$4_{90^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{162^\circ}$$

$$4_{162^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{234^\circ}$$

$$4_{234^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{306^\circ}$$

$$4_{306^\circ} \cdot 1_{72^\circ} = 4_{18^\circ}$$



113. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto  $V(-3, 1)$  y que no corta al eje de abscisas.

## Solución:

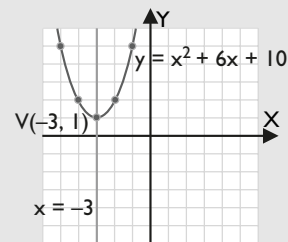
Las raíces son:

$$x_1 = -3 + i$$

$$x_2 = -3 - i$$

$$(x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$$

$$y = x^2 + 6x + 10$$



114. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$

b)  $x^3 + 6x + 20 = 0$

## Solución:

a)  $x_1 = 1, x_2 = 3 + 2i, x_3 = 3 - 2i$

b)  $x_1 = -2, x_2 = 1 + 3i, x_3 = 1 - 3i$

**Paso a paso**

115. Multiplica los siguientes números complejos.

$$z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = 4 + 5i$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

116. Divide los siguientes números complejos.

$$z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = 4 + 5i$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

117. Calcula la siguiente potencia:  $(2 + 3i)^5$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

118. Resuelve la ecuación:  $x^2 - 6x + 13 = 0$

Haz la interpretación gráfica representando la parábola correspondiente.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

119. Representa el lugar geométrico definido por la expresión:  $|z| = 5$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

120. **Internet.** Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es), elige **Matemáticas, curso y tema.**

**Practica**

121. Sean  $z_1 = 5 - 4i$ ,  $z_2 = -2 + 3i$

Calcula:

- a)  $z_1 + z_2$                       b)  $z_1 - z_2$   
c)  $7z_1 - 4z_2$                     d)  $-5z_1 + 9z_2$

**Solución:**

- a)  $3 - i$                               b)  $7 - 7i$   
c)  $43 - 40i$                         d)  $-43 + 47i$

122. Sean  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 4 - 2i$ ,  $z_3 = -1 + 6i$

Calcula:

- a)  $z_1 \cdot z_2$       b)  $z_1 \cdot z_3$       c)  $z_2 \cdot z_3$

**Solución:**

- a)  $22 + 14i$       b)  $-33 + 13i$       c)  $8 + 26i$

123. Calcula:

- a)  $(3 + 2i)^7$                       b)  $(-4 + 7i)^8$   
c)  $(2 - i)^9$                         d)  $(1 + i)^{10}$

**Solución:**

- a)  $-4449 - 6554i$                   b)  $-9470207 - 15131424i$   
c)  $-718 + 1199i$                   d)  $32i$

124. Sean  $z_1 = 5 + 6i$ ,  $z_2 = 8 - 9i$ ,  $z_3 = -4 + 3i$

Calcula:

- a)  $z_1/z_2$       b)  $z_1/z_3$       c)  $z_2/z_3$

**Solución:**

- a)  $-\frac{14}{145} + \frac{93}{145}i$   
b)  $-\frac{2}{25} - \frac{39}{25}i$   
c)  $-\frac{59}{25} + \frac{12}{25}i$

125. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a)  $z^2 = -3$                       b)  $z^2 = -i$   
c)  $z^3 = 1$                         d)  $z^3 = i$

**Solución:**

- a)  $z_1 = -\sqrt{3}i$ ,  $z_2 = \sqrt{3}i$   
b)  $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$   
c)  $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $z_3 = 1$   
d)  $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ,  $z_3 = -i$

126. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a)  $z^4 = 81$
- b)  $z^4 = -16$
- c)  $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$
- d)  $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

**Solución:**

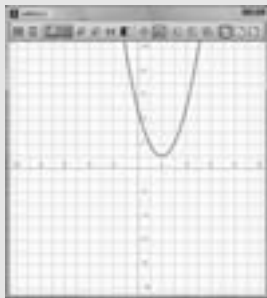
- a)  $z_1 = -3i, z_2 = 3i, z_3 = -3, z_4 = 3$
- b)  $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$   
 $z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
- c)  $z_1 = -3i, z_2 = 3i, z_3 = -2, z_4 = 2$
- d)  $z_1 = -3i, z_2 = 3i, z_3 = -2i, z_4 = 2i$

127. Resuelve la ecuación:  $x^2 - 4x + 5 = 0$

Haz la interpretación gráfica representando la parábola correspondiente.

**Solución:**

$$x_1 = 2 - i, x_2 = 2 + i$$



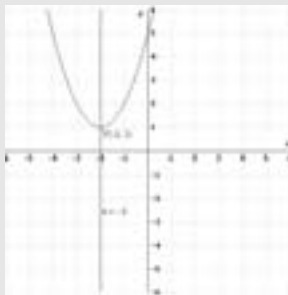
128. Resuelve la ecuación:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Haz la interpretación gráfica representando la parábola correspondiente.

**Solución:**

$$x_1 = -2 - i, x_2 = -2 + i$$



129. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces complejas conjugadas  $3 \pm 4i$

**Solución:**

$$(x - 3)^2 + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

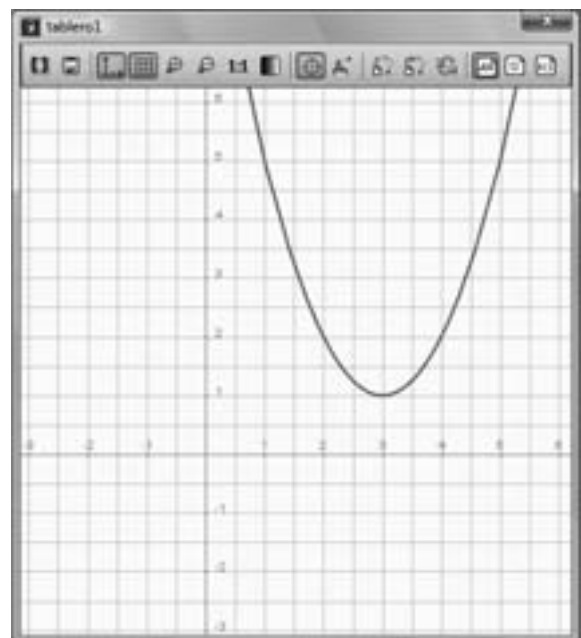
130. Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces:  $6 \pm \sqrt{5}i$

**Solución:**

$$(x - 6)^2 + 5 = 0$$

$$x^2 - 12x + 41 = 0$$

131. Mediante *ensayo-acierto* halla la fórmula de la siguiente parábola.



**Solución:**

$$y = x^2 - 6x + 10$$